К ГИПОТЕЗЕ ХАРТСФИЛДА-РИНГЕЛЯ ОБ АНТИМАГИЧНОСТИ СВЯЗНЫХ ГРАФОВ

В.Н. Калачев

Белорусский Государственный Университет, Механико-математический факультет
Независимости 4, 220050, Минск, Беларусь
vitkalachev@gmail.com

В 1990 г. Хартсфилд и Рингель ввели в своей книге [1] понятие *антимагической нумерации ребер графа*:

Определение 1. Пусть $G = (V, E)$ – (n, m)-граф, а $\varphi : E \to \{1, 2, \dots m\}$ – некая инъективная функция. Определим на V функцию f, положив для $\forall v \in V f(v) = \Sigma_e \varphi(e)$, где e пробегает множество ребер, инцидентных v. Если такая f также оказывается инъективной, то функция $\varphi(e)$ называется *антимагической нумерацией.*

Графы, для которых такая нумерация возможна, были названы *антимагическими.* Также в [1] высказано предположение, что все связные графы с $n \geqslant 3$ являются антимагическими. Т.о., если эта гипотеза верна, получаем еще одно тривиальное свойство для связных графов (кроме K_2).

В общем случае гипотеза до сих пор не доказана и не опровергнута, хотя существует много работ, ей посвященных. Все имеющиеся на сегодня результаты получены путем сужения задачи на некоторый класс графов.

Теория алгебраической декомпозиции графов (АДГ) была разработана в Минске Р.И. Тышкевич и её учениками и зарекомендовала себя как эффективный способ решения различных задач на графах. Хотя АДГ изначально создавалась для решения алгоритмических задач и подсчета некоторых характеристик графов, последние результаты позволяют утверждать, что эта теория также применима и для исследования гипотез (например, сильной гипотезы Бержа или гипотезы Келли-Улама о реконструируемости).

Так, в частности, в 2008 г. М. Баррус в работе [2] доказал, что расщепляемые графы и 1-разложимые графы являются антимагическими. В 2014 году этот результат был обобщен автором и перенесен на более широкие классы графов, а именно на $(1, 2)$-*полярные* и $(1, 2)$-*разложимые* графы [3]. Также в 2014 году автором было показано, что *связные униграфы являются антимагическими* [4] (на основе полного описания структуры униграфов, полученного Р. И. Тышкевич в [5]).

В настоящем докладе представлены результаты дальнейших исследований в области применимости АДГ к доказательству гипотезы Харстфилда-Рингеля. Основное достижение - доказательство свойства антимагичности $(1, Q)$-*полярных* и $(1, Q)$-*разложимых* графов для произвольного $Q \geqslant 3$ при выполнении некоторых ограничений на степени вершин этих графов. А именно: $\deg b \leqslant \deg a$ и $\deg b \leqslant \deg c$ для $\forall a \in A, b \in B, c \in C$, где $V = A \sqcup B \sqcup C$, $G(A)$ - верхняя доля $(1, Q)$-полярного или $(1, Q)$-разложимого графа, $G(B)$ - его нижняя доля, $G(C)$ - произвольный граф (если он есть).

Литература

1. N. Hartsfield and G.Ringel. *Pearls in Graph Theory.* Boston: Academic Press, Inc., 1990.
2. M.D. Barrus. *Antimagic labeling and canonical decomposition of graphs.* Information Processing Letters Journal. 2010. Vol. 110. Issue 7. P.261–263.
3. Калачев В.Н. *К гипотезе Хартсфилда-Рингеля:* $(1, 2)$*-полярные и* $(1, 2)$*-разложимые графы.* Вестник БГУ. 2014. № 3. С. 81–83.
4. Калачев В.Н. *К гипотезе Хартсфилда-Рингеля: связные униграфы.* Труды института математики. 2014. Т. 22. № 2.
5. Tyshkevich R.I. *Decomposition of graphical sequences and unigraphs* // Discrete Mathematics. 2000. V. 220. P. 201–238.